La geometria spaziotemporale dei buchi neri

La geometria di Schwarzschild

In relatività non si parla di campo gravitazionale ma di geometria dello spaziotempo. L'attrazione tra due corpi viene spiegata come effetto dovuto alla curvatura imposta allo spaziotempo dalla massa di questi due corpi. Lo spaziotempo è un'entità matematica quadridimensionale per mezzo della quale è possibile descrivere la posizione sia nel tempo che nello spazio di un determinato evento. La formulazione della relatività ristretta nel 1905 e poi della relatività generale nel 1915 ha permesso di concludere che spazio e tempo sono strettamente legati tra di loro. Infatti una massa non curva lo spazio ma lo "spaziotempo" nel senso che produce effetti anche sullo scorrimento del tempo. È impossibile per un corpo con una massa che lasci intatto lo scorrere del tempo modificando soltanto lo spazio, questo perché spazio e tempo sono la stessa grandezza, cioè la coordinata di uno spazio quadridimensionale, lo spaziotempo appunto.

Ci sono diversi sistemi di coordinate che consentono una descrizione quantitativa di un campo gravitazionale di un oggetto sferico non ruotante. Alcune di esse consentono di studiare agevolmente i moti dei corpi in condizioni di curvatura critica come quella presente nelle vicinanze di un buco nero.

La geometria di Schwarzschild descrive la struttura geometrica dello spaziotempo attorno ad una massa a simmetria sferica. Una delle principali previsioni della geometria di Schwarzschild è che una massa M compressa entro un raggio R_S, chiamato raggio di Schwarzschid, la curvatura dello spazio tempo è tale che lo spaziotempo si richiude su se stesso impedendo alla luce di fuggire da tale corpo.

Per una massa M il raggio di Schwarzschild è dato da:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

dove G è la costante di gravitazione universale mentre c è la velocità della luce.

Curiosamente il raggio di Schwarzschild venne introdotto da John Michell nel 1783 nel contesto della gravità newtoniana. Il corpo che scaturiva da questo lavoro presentava delle caratteristiche molto diverse da quelle descritte con la relatività generale.

La superficie della sfera avente raggio uguale al raggio di Schwarzschild è detta "orizzonte degli eventi" a causa del fatto che tutti i fenomeni esterni ad essa sono osservabili mentre quelli che avvengono al loro interno sono inaccessibili a tutti gli osservatori esterni. La geometria di

Schwarzschild è descritta dalla metrica di Schwarzschild. Consideriamo un sistema geometrico dove si assume $c = 1$ la metrica di Schwarzschild diventa:

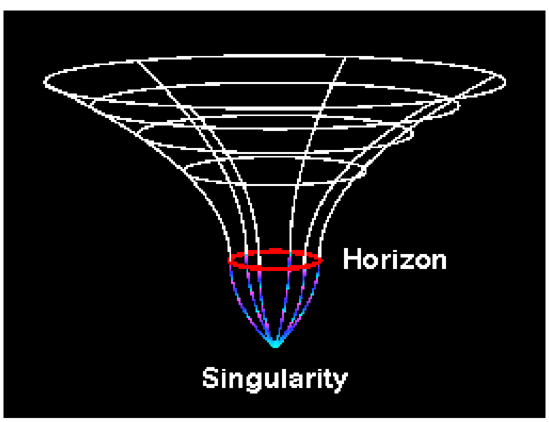
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

dove r, θ, φ sono le tre coordinate dello spazio tridimensionale mentre t è il tempo.

La geometria della metrica di Schwarzschild è illustrata nel grafico con una rappresentazione bidimensionale dello spazio tridimensionale ad un certo istante. In accordo con la metrica di Schwarzschild la distanza radiale di ciascun osservatore a riposo è:

$$dr' = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}}$$

che è maggiore del *dr* misurato in uno spazio piatto.



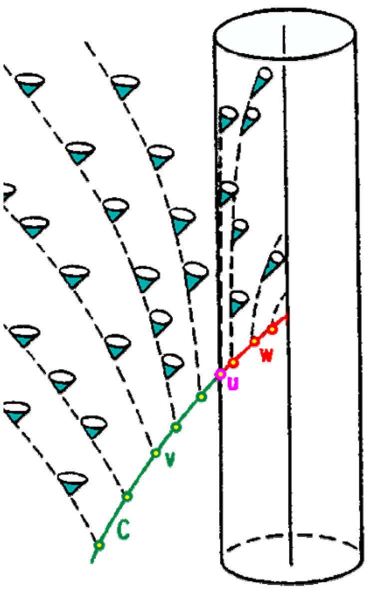
Esternamente all'orizzonte degli eventi le coordinate rappresentate sono spaziali (ciò significa che la misura di una lunghezza nel grafico corrisponde ad una distanza). Internamente all'orizzonte degli eventi le linee diventano temporali e rappresentano la misura degli intervalli di tempo intercorrenti tra le posizioni assunte da alcuni osservatori.

La gravità rallenta lo scorrere del tempo

In relatività generale gli orologi a riposo immersi in un potenziale gravitazionale rimangono indietro rispetto a quelli posti in quiete in uno spazio piatto. Nel caso della metrica di Schwarzschild il tempo proprio viene calcolato tramite la seguente relazione:

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}\, dt$$

Quindi mentre in uno spaziotempo piatto l'osservatore misura un intervallo *dt*, un osservatore che si trova in uno spaziotempo curvo misura un intervallo più breve perché il tempo scorre più lentamente.



A questo fenomeno si lega un altro importante fenomeno: l'effetto Doppler gravitazionale. Immaginiamo un osservatore con una sorgente **V** appena al di fuori dell'orizzonte degli eventi ed un osservatore **C** posto a distanza sufficiente da poter considerare lo spaziotempo piatto. L'osservatore esterno **C** vedrebbe scorrere più lentamente le lancette dell'orologio dell'osservatore interno **V**, quindi se da **V** parte un'onda elettromagnetica di frequenza ν composta da n oscillazioni al secondo per **V**, quando l'onda arriverà a **C** presenterà lo stesse oscillazioni su un intervallo di tempo più lungo, quindi nell'unità di tempo all'osservatore **C** si presenterà un numero di oscillazioni minore riducendo la frequenza del fenomeno.

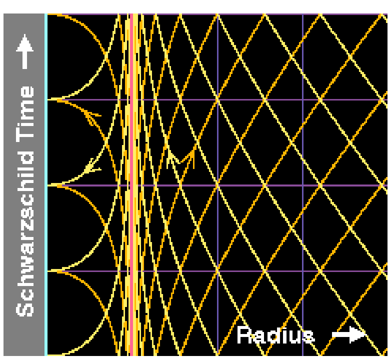
La variazione così subita dalla lunghezza dell'onda elettromagnetica è fornita dall'equazione:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}}$$

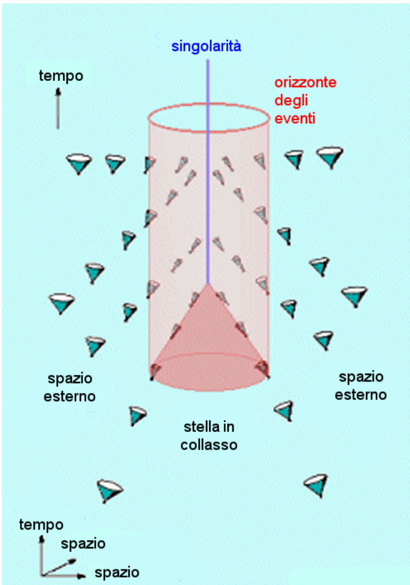
che provoca uno spostamento verso il rosso della radiazione visibile.

Sistemi di coordinate alternativi

La metrica di Schwarzschild presentava un inconveniente matematico: sia il tempo proprio di un osservatore che il raggio proprio tendono a diventare immaginari durante il transito attraverso l'orizzonte degli eventi.



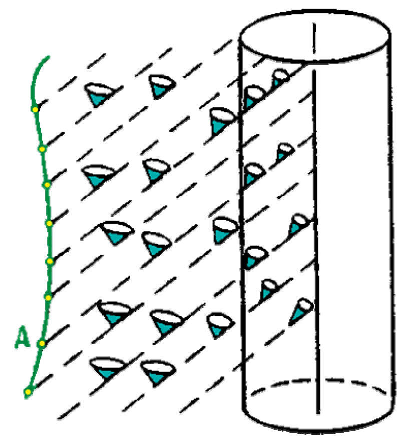
La metrica Schwarzschild è nata con lo scopo di descrivere questi fenomeni da un osservatore in quiete rispetto al buco nero. La presenza di grandezze immaginare mette in evidenza l'impossibilità dell'esistenza di un sistema di riferimento in quiete all'interno dell'orizzonte degli eventi. Per comprendere meglio il comportamento dello spaziotempo nella metrica di Schwarzschild consideriamo il grafico qui riportato. Le linee ocra e gialle sono le linee di modo (traiettorie nello spaziotempo) riguardanti la luce, la riga azzurra verticale è la singolarità centrale mentre le linea fucsia verticale è l'orizzonte degli eventi. Le linee di mondo disegnato permettono di risalire alla ricostruzione dei coni di luce partendo da un loro punto di intersezione. Il diagramma presenta in ascissa lo spazio ed in ordinata il tempo. Poiché tutti i corpi



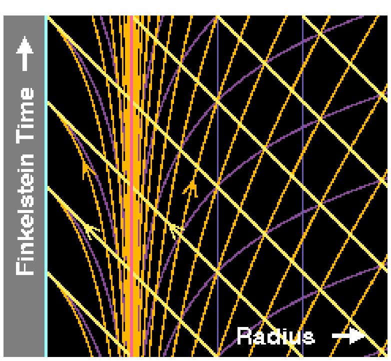
si muovono con una velocità avente modulo inferiore a quello della luce, le traiettorie che essi percorrono nello spaziotempo devono quindi essere contenute all'interno dei coni di luce.

Il grafico qui a fianco riporta in maniera più intuitiva la struttura dei coni di luce nei pressi dell'orizzonte degli eventi. Si può notare come il coefficiente angolare di un raggio di luce in uscita dal buco nero tenda all'infinito sull'orizzonte degli eventi. Diventa così comprensibile che nessun corpo che si trovi sull'orizzonte degli eventi può sfuggire dalla singolarità centrale.

Ma cosa succede oltre l'orizzonte degli eventi? Per capirlo dobbiamo considerare un corpo in quiete e chiederci qual è la sua traiettoria. La traiettoria di un corpo in quiete è una retta verticale. Se ora osserviamo i coni di luce all'interno dell'orizzonte degli eventi vedremo che presentano un'inclinazione tale che anche i raggi di luce sono tutti destinati a cadere sulla singolarità centrale. Poiché un corpo presenta una traiettoria contenuta in questo cono e la retta verticale in queste condizioni è esterna al cono, si deduce che non è possibile all'interno dell'orizzonte degli eventi alcun stato di quiete



Lo spaziotempo nelle coordinate di Eddington-Finkelstein



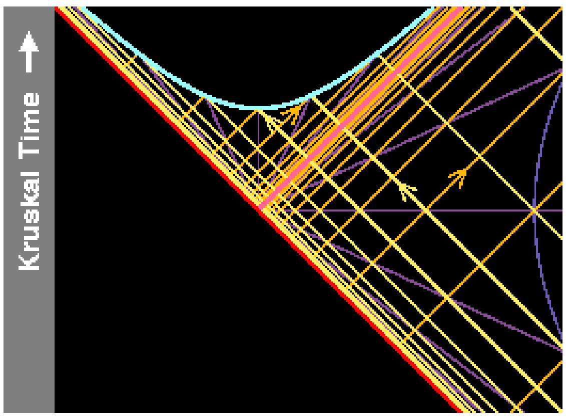
La relatività generale consente in maniera agile di passare da un sistema di riferimento ad un altro . Le coordinate di Eddington – Finkelstein differiscono da quelle di Schwarzschild per un riassetto della geometria delle coordinate temporali. Le linee di mondo della luce entrante (in giallo) assumono un'andamento lineare con coefficiente angolare di 45° in caduta verso la singolarità. La relazione che lega le coordinate di Eddington –

Finkelstein con le coordinate di Schwarzschild è data dall'equazione:

$$t_F = t + \ln|r-1|$$

dove t_F è il tempo di Finkelstein mentre sono stati assunti $c = 1$ e la distanza r è espressa in unità del raggio di Schwarzschild.

Lo spaziotempo nelle coordinate di Kruskal



Le coordinate di Kruskal mostrano nella maniera più trasparente la geometria dello spaziotempo nei pressi di una singolarità. In queste coordinate le linee di mondo della luce entrante (gialle) e quelle della luce uscente (ocra) assumono un'andamento lineare con un'inclinazione a 45°. La trasformazione di coordinate deforma le linee di mondo mantenendo in ogni punto dello spaziotempo la stessa identica forma per i coni di luce. Queste trasformazioni però provocano la deformazione della singolarità centrale che si trafrorma in un iperbole (azzurra) mentre l'orizzonte degli eventi diventa l'asintoto di questa iperbole (fucsia). Il grafico qui riportato mostra come un raggio di luce che parte dall'interno dell'orizzonte degli eventi sia destinato a cozzare sulla singolarità, mentre un raggio di luce può ancora fuggire da essa.

Ma come è fatta la metrica nelle coordinate di Kruskal ? Per ottenere le coordinate di Kruskal occorre applicare una trasformazione spaziale alle coordinate di Eddington – Finkelstein:

$$R = r + \ln|r-1|$$

dove R è la nuova coordinata spaziale mentre r è la coordinata spaziale nel sistema di Eddington – Finkelstein espressa sempre in unità di raggi di Schwarzschild. Per ottenere le coordinate di Kruskal r_k e t_k si devono operare le seguenti trasformate:

$$r_k + t_k = 2e^{(R+t)/2}$$
$$r_k - t_k = \pm 2e^{(R-t)/2}$$

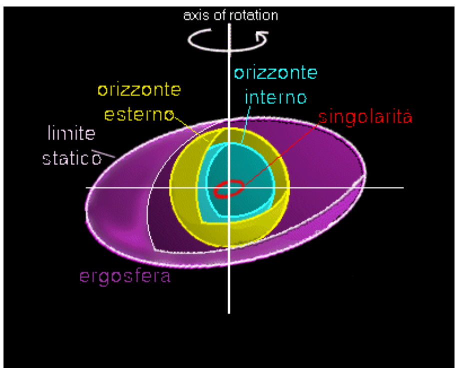
dove il segno + viene assuntoesternamente all'orizzonte degli eventi mentre il segno – all'interno dell'orizzonte degli eventi. Le coordinate diventano allora:

$$r_K = e^{\frac{R+t}{2}} \pm e^{\frac{R-t}{2}}$$
$$t_K = e^{\frac{R+t}{2}} \mp e^{\frac{R-t}{2}}$$

mentre la metrica di Kruskal sarà:

$$ds^2 = \frac{e^{-r}}{r}\left(dr_K^2 - dt_K^2\right) + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Buchi neri rotanti: La soluzione di Kerr



Questa è la soluzione più realistica, infatti poiché i progenitori del buco nero sono stelle in rotazione, la legge di conservazione del momento angolare afferma che una stella ruotante produrrà durante il collasso un buco nero in rapida rotazione.

La soluzione presentata prende il nome dal matematico neozelandese Roy Kerr che fu il primo ad ottenere le equazioni di un campo gravitazionale in relatività generale per un corpo ruotante. La metrica è espressa dall'equazione:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 - a^2\right)\sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{2Mr}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta d\varphi\right)^2$$

con $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$ e $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$.

Sia J il momento angolare del buco nero, il parametro a è il parametro di rotazione fornito dal rapporto tra J e la massa M.

$$a = \frac{J}{M}$$

Si può osservare come la metrica di Kerr mischia le coordinate. Una geometria siffatta presenta alcune stranezze che vanno descritte adeguatamente:

1. Il buco nero ruotando trascina con se nella rotazione anche lo spaziotempo curvo che lo circonda . Questo fenomeno potrebbe anche essere una delle cause dell'accelerazione a velocità relativistiche delle particelle componenti il disco di accrescimento del buco nero.
2. Un fotone entrante si trova di fronte a un orizzonte più interno o a uno più esterno a seconda che la velocità di entrata sia parallela o antiparallela alla direzione di rotazione del buco nero

3. Un’ulteriore ellissoide immaginario risiede all’esterno dell’orizzonte, si chiama ergosfera e stabilisce il limite entro il quale non sono più possibili sistemi di riferimento inerziali
4. Più un buco nero ruota veloce e più piccoli saranno gli orizzonti degli eventi.

È importante notare che un osservatore riscontrerà un solo orizzonte, l’altro orizzonte è riscontrabile dall’osservatore che ruoterà in senso contrario. Naturalmente ciascun osservatore non sarà in grado di avere riscontro dell’orizzonte degli avente riscontrato dal compagno che ruota in senso opposto. Ogni singolo osservatore può quindi riscontrare un solo orizzonte degli eventi.