

Come può formarsi un buco nero

Quale forza può contribuire alla formazione di un astro così inusuale?

Una stella di massa solare quando termina il combustibile nucleare vede prevalere nel proprio nucleo la forza di gravità che lo comprime riscaldandolo. Ad una certa temperatura si innesca la fusione dell'elio in carbonio. Naturalmente anche queste reazioni termineranno e la stella raggiungerà il suo stato di equilibrio dato dalla pressione di degenerazione.

Nel 1925 Wolfgang Pauli dimostrò che due particelle che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac non potevano assumere lo stesso stato di numeri quantici.

Successivamente queste regole vennero applicate da Enrico Fermi al gas perfetto.

Il principio di Pauli applicato ad un gas perfetto affermava che nello spazio delle fasi l'elemento di volume

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3$$

non può contenere più di un fermione¹ nello stesso stato quantico. Consideriamo l'addensamento massimo, ogni elemento di volume $\Delta V = h^3$ sarà occupato da k particelle con momento inferiore al momento di Fermi p_f , nello spazio delle fasi il volume sarà allora rappresentato dall'equazione:

$$\frac{N}{k} h^3 = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{4}{3} \pi p_f^3$$

dove N è il numero complessivo di particelle. Da questa espressione è possibile calcolare il momento di Fermi:

$$p_f = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi r^3 k}} h = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} h k^{-1/3} \rho^{1/3}$$

dove ρ è la densità delle particelle

$$\rho = \frac{3N}{4\pi r^3}$$

L'energia massima assunta dalle particelle è:

$$E_f = \frac{p_f^2}{2m} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \frac{1}{2} h^2 m^{-1} k^{-2/3} \rho^{2/3}$$

questo tipo di gas è detto degenere, l'energia media di questa distribuzione è:

¹ I fermioni sono le particelle che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac (ad esempio elettrone, protone, neutrone...). Le altre particelle si chiamano bosoni (ad esempio i fotoni) ed obbediscono alla statistica di Bose-Einstein e non sono vincolati dal principio di Pauli.

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_f$$

e poiché per un gas perfetto la pressione è definita dall'equazione di stato

$$P = \frac{2}{3} \langle E \rangle \rho$$

avremo

$$P_D = \frac{2}{3} \frac{3}{5} E_f \rho = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} h^2 m^{-1} k^{-2/3} \rho^{5/3}$$

Questa è la pressione di degenerazione; come si vede è proporzionale a $\rho^{5/3}$. Per una massa simile a quella del Sole questa pressione che provoca l'arresto del collasso. Nel caso l'energia di Fermi sia molto più grande dell'energia di riposo delle particelle ci troveremo in condizioni relativistiche con l'energia da considerare che assume la forma:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Se ripetiamo i conti nel caso relativistico otteniamo la seguente relazione:

$$P_D^{(r)} = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{1/2} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} c h k^{-1/3} \rho^{4/3}$$

che implica una dipendenza minore dalla densità consentendo la formazione di astri ancora più esotici delle usuali nane bianche: le stelle di neutroni. Infatti per i nuclei stellari più massicci la pressione degenera del gas di Fermi non è più in grado di arrestare il collasso, il nucleo si comprime e si riscalda innescando successive catene di reazioni nucleari che produrranno fosforo, magnesio, silicio e Ferro. Il ferro è l'elemento con la massima energia di legame e quindi non è possibile procedere con ulteriori reazioni di fusione. Infatti queste reazioni richiedono energia invece di produrla. Il nucleo è quindi destinato al collasso. La pressione degenera di elettroni non è più in grado di sorreggere la stella. A questo punto possono accadere due fenomeni. Se la massa è inferiore a 3,2 masse solari i neutroni diventano degeneri e vengono compressi fino a densità di 10^{14} g/cm^3 producendo un pressione in grado di contrastare la gravità. Invece se la massa del nucleo è superiore a 3,2 masse solari (limite di Volkov-Oppenheimer) neanche la pressione prodotta dai neutroni sarà in grado di contrastare la forza di gravità e il collasso gravitazionale del nucleo stellare procederà all'infinito formando il buco nero.